付録１：ラグランジュによる、仮想速度の原理の一般化

以下は『解析力学』初版における仮想速度の原理の一般化に関する議論をまとめたものである[*1]。この議論は第二版では書き換えられており、別の証明が与えられているが、本発表の関心はラグランジュの初期の力学であるため、第二版での議論については検討しない。

つりあっている系に働いている力を $P, Q, R, \ldots$ とし、作用点から力の方向に沿って線分 $p, q, r, \ldots$ を引く。また、この系に生じた微小な運動による $p, q, r, \ldots$ の変化（変分：variation）を $dp, dq, dr, \ldots$ とする。

まず三つの力 P, Q, R のつりあいを考える。このつりあいは、力 R が働いていると考える代わりに、R の作用点が固定されていると考えても成り立つ。その場合、r は一定で p と q が変化するので、「通常の」仮想速度の原理から

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq_r}{dp_r}$$

が得られる[*2]。マイナス記号は、二つの力が逆方向に動くはずであるということから要請される。これより、二つの力について

$$Pdp_r + Qdq_r = 0$$

が得られる。同様にして、Q の作用点を固定すれば $Pdp_q + Rdr_q = 0$ が、P の作用点を固定すれば $Qdq_p + Rdr_p = 0$ が成り立つ。この三つの式から、三つの力に対する仮想速度の原理が帰結する。

実際、p, q, r の間には何らかの関係があるはずなので、

$$dp = mdq + ndr$$

と書くことができる。ここで r が一定とすれば $dp_r = mdq$ となるから、上述の $Pdp_r + Qdq_r = 0$ に現れる Pdp_r は $Pmdq$ に等しく、同様にして $Pdp_q + Rdr_q = 0$ に現れる Pdp_q は $Pndr$ に等しい。それゆえ、この二つの式に現れる P を含む項の和 $Pmdq + Pndr$ は Pdp に等しくなる。Qdq, Rdr についても同様である。したがって、先の三つの式を足し合わせれば

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0$$

が得られることになる[*3]。

同様の推論により、四つ以上の力の場合も順に証明できる。

[*1] (Lagrange1788, 12–15 (pt.1, sec.2, §1)).

[*2] 議論を分かりやすくするため、ラグランジュが使っていない添字を導入する（以下の議論に現れる記号から添字を取り除けばラグランジュの表記になる）。この添字は、一定で変化しないと仮定される変数を表す。

[*3] 添字を使えば、三つの式の和は $(Pdp_r + Qdq_r) + (Pdp_q + Rdr_q) + (Qdq_p + Rdr_p) = 0$ となるが、ここで $dp = dp_q + dp_r$ 等であるから、$Pdp + Qdq + Rdr = 0$ に帰着することが容易に分かる。

付録２：斜面上でのつりあいに関するヴァリニョンとオイラーの議論

斜面上の物体に、鉛直下向きの力 P と、斜面に沿った力 Q が働いていて、つりあっているとする。まずヴァリニョンの証明の概要を示す[*4]。図 1 で仮想速度を Aa とすると、P は Ap

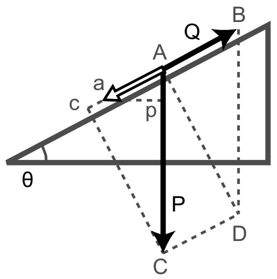

図 1　斜面上での力のつりあい

だけ前進し、Q は Aa だけ後退する。ここから、それぞれの精力が $P \times Ap$（正）、$Q \times Aa$（負）となる。それゆえ、つりあっている場合には

$$P \times Ap = Q \times Aa$$

であるというのがベルヌーイの主張である。

> 【証明】AC, AB が力の大きさを表しているとすると、つりあっている場合には、AC と AB を辺とする平行四辺形の対角線 AD が斜面と直交することが知られている。Aa の延長線上に C から下ろした垂線の足を c とすると、三角形 Apa と AcC が相似なので $Ac = AC \times Ap/Aa$. また、簡単な幾何学的考察から $Ac = AB$. この二式から $AC \times Ap = AB \times Aa$ となるが、$AC : AB = P : Q$ であるから、$P \times Ap = Q \times Aa$ が成り立つ。

これに対し、オイラーはまず「労力」

$$\int P\,dp + \int Q\,dq \quad (dp = -Ap,\, dq = Aa)$$

を定義し、これが最小という条件から $Pdp + Qdq = 0$ を得る。ここで図より $Ap = Aa \sin\theta$, すなわち $dp = -dq \sin\theta$. これを代入して整理すれば $(-P\sin\theta + Q)dq = 0$. よって $Q = P\sin\theta$[*5].

[*4] 正しくは、斜面からの抗力を考慮しなければつりあいは不可能だが、以下の議論ではこれは問題にならない。なお、ヴァリニョンは P および Q（彼の記号では P と R）の方向が任意である場合をまず証明し、その後でこれらが鉛直方向と斜面方向である場合を考えているが、ここでは簡単のため、後者の場合を直接証明する。元になっている証明は (Varignon1725, t.2, 213-215) にある。

[*5] (Euler1751, 170–171). オイラーが扱っている問題では、Q は斜面と角度を成して上を向いているが、ここではヴァリニョンとの比較のため、簡単な例にした。また、記号は全面的に変更している。オイラーが元々扱っている例については、拙稿 (有賀 2006) で紹介しているので参照されたい。