

オイラーとラグランジュ

——最小作用の原理から『解析力学』へ——

2007年5月26日

有賀暢迪

京都大学文学研究科（博士後期課程・科学哲学科学史専修）

本報告の趣旨

最小作用の原理の展開に即して、
オイラーがラグランジュに与えた影響を紹介

1. オイラーと最小作用の原理: 1744-1752
2. ラグランジュと最小作用の原理: 1755-1763
→『解析力学』(1788)にまで受け継がれていく

力学の歴史におけるオイラーの位置を、
ラグランジュによる受容という観点から考察する

力学における「二重の方法」



オイラーは、力学の問題を解くアプローチには二種類あると考える(二重の方法)

通常の方法

- ・質点に働く力を考えて運動方程式を立てる
- ・作用因による方法

もう一つの方法

- ・自然の意図(何らかの量を最小化する)を考える
- ・目的因による方法

二つの方法は同じ結果を与える

二つの『付録』(1744)

『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』 (1744)の二つの「付録」

「最大または最小の方法」(変分法のオイラー方程式)を用いて力学の問題を論じる

付録1: 薄板を曲げたときの形状

付録2: 投射体の軌道

それぞれ、ある量が最小になるという条件から出発して、問題の曲線の形状を導く

最小量の探求(1744-1748)

『付録』におけるオイラーの考え

1. 自然現象においては何らかの量が最小である
2. 何らかの量をあらかじめ知るのは困難
…最小量は個々の場合ごとに発見する必要がある

cf. モーペルテュイ: 「作用の量」= 質量 × 速度 × 距離

「力学的曲線」における最小量の探求(1748頃)

- ・両端を固定された糸の形状
- ・つりあい状態にある流体の形状

普遍的な最小量の発見(1748)

様々な場合の最小量は、単一の量に帰着する

$$\text{「労力 (effort)」: } \int V \, dv$$

(V: ある点に向かう力、dv: その点から物体要素への距離要素)

→ 自然は「労力」をできる限り節約しようとする

つりあいにおいて「労力」が最小であることは
モーペルテュイの「静止の法則」(1740)で示されていた

静止の法則と運動の法則の「調和」(1752)

「モーペルテュイ氏の
静止と運動の一般原理のあいだの調和」(1752発表)

「静止の法則」…「労力」 $\int V dv$ が最小



互いに導出可能:「調和」



「運動の法則」…「作用」 $\int mu ds$ が最小

(m:質量, u:速度, ds:距離要素)

※『付録2』で論じていた法則

「静止の法則」=「運動の法則」に基づく力学体系
運動方程式を基礎とするのではない、「もう一つの力学」

数学的手法の限界

「最大または最小の方法」は、曲線を求める手法扱った問題は、いずれも「力学的曲線」

cf. オイラーの力学研究プラン(『力学』(1736))

1. 無限に小さな物体
2. 変形しない物体
3. 柔軟な物体
4. 伸縮する物体
5. 多数の物体
6. 流体

オイラーは、「もう一つの力学」をそれ以上追及せず

新たな展開

1755年の夏、オイラーの元に届いた書簡

「最大または最小の方法」に代わる新しい数学的手法
(変分法の δ 記号を用いる手法)

→オイラーの賞賛

差出人は青年ラグランジュ(当時19歳!トリノ在住)

続く数年間に、変分法の基礎を作り、

それを**最小作用の原理に適用**することを試みる

…主としてオイラー宛書簡で述べられる

ラグランジュと最小作用の原理(1755-1759頃)

書簡から読み取れるラグランジュの考え

1. 自然の最小性を信じているようには見えない
…単に原理の名前として「最小」と言っている
2. 最小作用の原理を、
静力学と動力学の「普遍的な鍵」と見なす
(オイラー宛書簡 1756年10月5日付)

静力学と動力学を統一的に扱うというプログラムは
オイラーから受け継がれている

「失われた著作」

ラグランジュは最小作用の原理に関する著作を執筆

「固体および流体の、つりあいにせよ運動にせよ極めて複雑な諸問題の解を、最小作用量のただ一つの式から、単純かつ一般的な仕方で導くこと」がその主題
(ダニエル・ベルヌーイ宛書簡 1759年11月15日付)

この著作は結局、出版されず

- ・出版を取り計らってくれるよう、オイラーに依頼
→様々な事情から断られる
- ・今日では失われている(具体的内容は不明)

二つの論文(1762)

1762年、ラグランジュは二編の論文を出版

1. (δ 記号を使った変分法の解説)
2. 「先の論文で提示された方法の、
動力学の様々な問題の解に対する適用」

・一般原理:

$\int \mu ds + \int \mu' ds' + \int \mu'' ds'' + \dots = \text{最大/最小}$
…オイラーの「運動の法則」を拡張

・系の運動方程式を導出

…振動弦、剛体、流体の運動なども論じる

「仮想速度の原理」へ(1763)

「月の秤動についての研究」(1763執筆)

力学の基礎は、静力学の
「仮想速度の原理 (principe des vitesses virtuelles)」

これを運動に拡張することで動力学を論じる

…『解析力学』(1788)で採用される力学体系

最小作用の原理からの連続性

- ・静力学と動力学を統一的に論じるというプログラム
- ・「仮想速度の原理」の数学的形式

まとめ: 最小作用の原理から『解析力学』へ

静力学と動力学とを統一的に扱うという一貫した流れ

ラグランジュ

1788 『解析力学』

1759頃「失われた著作」

オイラー

1752 「[...] 静止と運動の一般原理のあいだの調和」

オイラーの「もう一つの力学」がラグランジュの出発点

力学史におけるオイラーの位置は、ラグランジュによる
受容という観点から、新しい評価を与えられる