

「仮想速度の原理」再考

——ラグランジュの力学の起源について——

2007年5月26日

有賀暢迪

京都大学文学研究科（博士後期課程・科学哲学科学史専修）

ラグランジュの『解析力学』

18世紀における力学の解析化の頂点

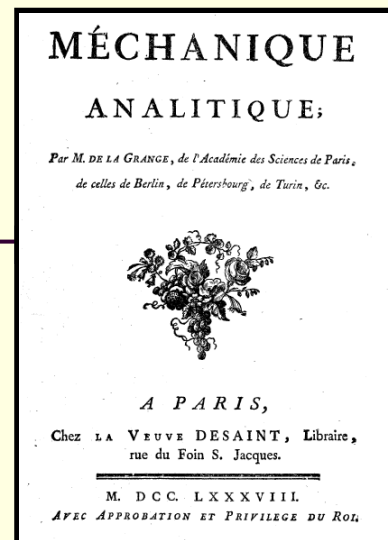
初版1788年、第2版1811-5年(大幅な改訂)

第1部: 静力学 ⇔ 第2部: 動力学

静力学: **仮想速度の原理** (principe des vitesses virtuelles)

…今日では仮想仕事の原理と呼ばれるもの

動力学: **PVV**を運動に拡張して用いる



ラグランジュの力学に関するこれまでの研究では、**PVVの導入については注目されてこなかった**

「仮想速度(仕事)の原理」の歴史

PVVの歴史についての定説

- アリストテレス、ヨルダヌス、ガリレオ、デカルト、etc.
- 最初に一般的な形で述べたのはヨハン・ベルヌーイ
…ヴァリニオン宛書簡(1717); ヴァリニオン『新しい機械学』(1725)

ラグランジュはベルヌーイが定式化したPVVを利用した

この見方について再考する

Barroso Filho, *La mécanique de Lagrange* (Karthala, 1994).

- **形式化**という観点からラグランジュの力学の形成を考察

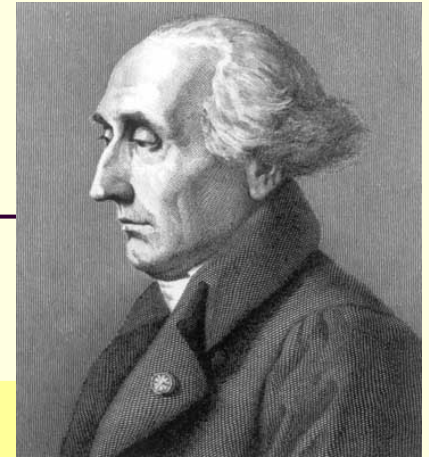
本発表の主張

1. ラグランジュのPVVの本質は**数学的形式**であり、それはベルヌーイやヴァリニオンには無い
2. ラグランジュによるPVVの**数学的形式化**の起源は、オイラーの仕事の中に見出せる

※対象とするラグランジュの著作

- ・「月の秤動についての研究」(出版1777; 執筆1763)
- ・「月の秤動の理論」(出版1782)
- ・『解析力学』(初版; 1788)

ラグランジュのPVV(1)

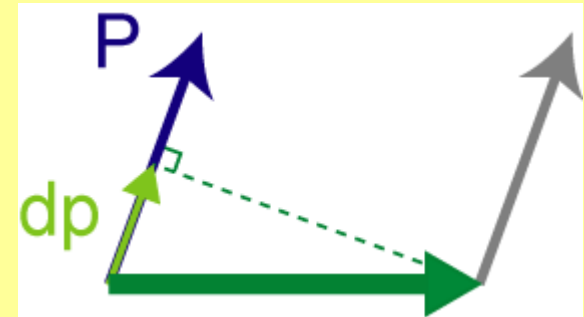


PVVの「一般的な」表現

つりあっている系に、小さな運動
(仮想速度)を与えたとき、
力と、移動距離の力方向成分とを
かけた量の総和はゼロになる

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0$$

↑この式がラグランジュの議論の出発点



これは、「通常『仮想速度の原理』と呼ばれているもの
の一般化」である

ラグランジュのPVV(2)

PVVの「通常の」表現

「力が互いにつりあいをなすとき、それらが加えられている点の、これらの力の方向において測った速度は、それらの力に逆比例する」

※ダランベールが「つりあいの一般原理」と呼ぶものと同じ
…ラグランジュもダランベールの『動力学論』(1743; 1758)に言及

「通常の」PVVは2つの力に関する原理

cf. 「一般的な」PVVは任意の数の力に適用可能

ラグランジュのPVV(3)

「通常の」PVVから「一般的な」PVVを導く

「通常の」PVV: 力と速度が逆比例

$$P : Q = dq : -dp \quad \therefore Pdp + Qdq = 0$$

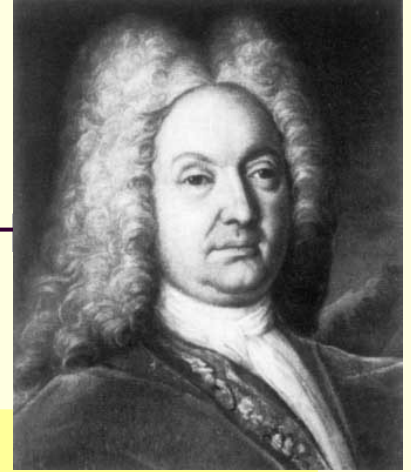
$$\rightarrow Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0$$

「一般的な」PVV: 力と速度(距離)の積の和がゼロ

ラグランジュは、「通常の」PVVに数学的形式を与え、
その一般化として、新しい原理を提示している

…この新しい原理はベルヌーイが述べていた、と解釈

ヨハン・ベルヌーイのPVV

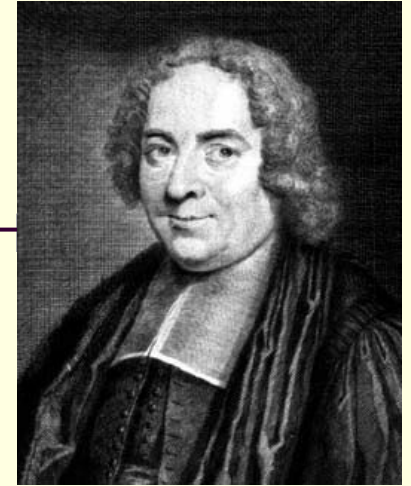


ヴァリニョン宛書簡(1717)での主張

つりあっている系に小さな運動を与えたとき、それぞれの力の前進／後退を仮想速度と名づけ、力と仮想速度との積を精力(énergie)と呼ぶ。このとき、正の精力の和は負の精力の和に等しい。(正／負は、力と仮想速度とのなす角度で決まる。)

ベルヌーイは言葉で述べただけで、数学的形式も、この原理の具体的な使い方も示していない

ヴァリニオンとPVV

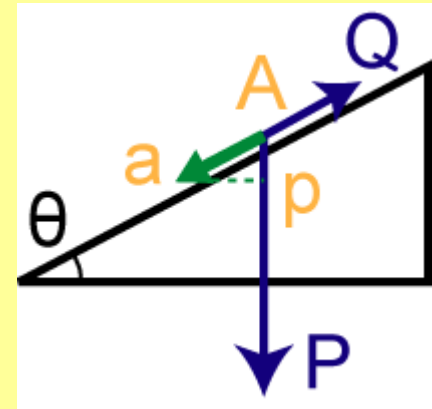


『新しい機械学』(1725)で
ベルヌーイの主張を証明

ベルヌーイに従って、量を線分で表す

- 仮想速度: Aa
- P, Q の前進・後退: Ap, Aa
- 精力: $P \times Ap$ (正), $Q \times Aa$ (負)

$P \times Ap = Q \times Aa$ を幾何学的に証明



滑車、てこ、ねじといった問題において、個別に例証

オイラーの「静止の法則」



オイラーは最小作用の原理に関連して、
「静止の法則」を述べる

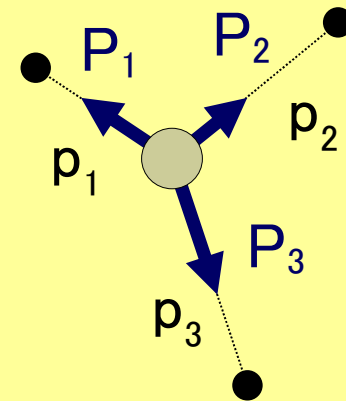
「モーペルテュイ氏の静止と運動の一般原理のあいだの調和」
(1751)

系が静止しているときには、

$$\int P dp$$

の総和が最小である

(P: 物体がある点に向かって引かれる力,
p: その点から物体までの距離)



オイラーによる「静止の法則」の利用

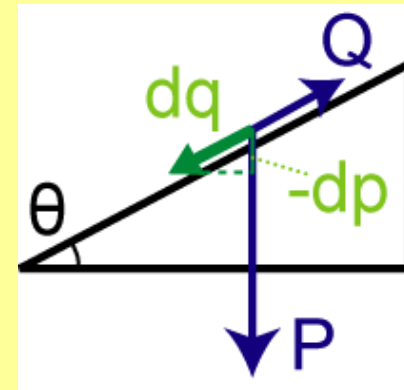
オイラーは「静止の法則」から、
静力学の様々な原理が導けることを示す

$$\int P dp + \int Q dq = (\text{最小})$$

$$\rightarrow P dp + Q dq = 0 \text{ [※]}$$

ここに $dq = -dp \sin \theta$ を代入

$$\therefore Q = P \sin \theta$$



◆ [※]は「一般的な」PVV！

◆ 代数的操作は、ラグランジュの議論の本質的なテクニック

「静止の法則」が、ラグランジュのPVVの起源

結論:ラグランジュによるPVVの導入(2)

ラグランジュのPVVの**数学的形式**は、
オイラーの「**静止の法則**」で与えられていた

- ◆オイラーは「**仮想速度**」という言葉を使わず、
ベルヌーイにも言及していないが、
数学的形式に関してはラグランジュのPVVと同等
- ◆ラグランジュはPVVの事例として「**静止の法則**」にも言及

数学的形式という観点からすれば、
ラグランジュのPVVの起源はオイラーに求めるべき

展望・課題

『解析力学』はオイラーの延長線上にある？

通常は、ダランベールの力学から発展したものとされる

数学的形式が力学にもたらしたもの？

ラグランジュの力学を、歴史の中にどう位置づけるか

一次文献(1/2)

- Jean le Rond d'Alembert, *Traité de Dynamique*, Paris: David, 1743. [Rep., Bruxelles: Culture et civilisation, 1967.]
- Jean le Rond d'Alembert, *Traité de Dynamique*, nouv. [2nd] éd., Paris: David, 1758. [Rep., Sceaux: J. Gabay, 1990.]
- Leonhard Euler, *Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis, Leonhardi Euleri Opera omnia, ser.II, vol.V, pp.152–176. [Originally pub. in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, 1751* (pub. 1753), pp.169–198.]*
- Joseph Louis Lagrange, *Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la Question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'année 1764, Œuvres de Lagrange, t.VI, pp.3–61. [Originally pub. in *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 1764* (pub. 1777)].*

一次文献(2/2)

- Joseph Louis Lagrange, *Théorie de la libration de la Lune, et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète*, *Œuvres de Lagrange*, t.VI, pp.5–122. [Originally pub. in *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, 1780 (pub. 1782), pp.203–309.]
- Joseph Louis Lagrange, *Mécanique analitique*, Paris: Desaint, 1788. [Rep., *Mécanique analytique*, Sceaux: J. Gabay, 1989.]
- Pierre Varignon, *Nouvelle mécanique, ou, statique, dont le projet fut donné en M.DC.LXXXVII*, Paris: Claude Jombert, 1725.

主要二次文献

- 有賀暢迪「オイラーの変分力学」『科学史研究』第45巻(2006年), 220–228頁.
- Wilton Barroso Filho, *La mécanique de Lagrange : principes et méthodes*, Paris: Karthala, 1994.
- Wilton Barroso Filho & Claude Comte, “La formalisation de la dynamique par Lagrange (1736–1813),” in R. Rashed *ed*, *Sciences à l’ époque de la révolution française : recherches historiques* (Paris, 1988), pp.329–348.
- Craig G. Fraser, “J. L. Lagrange’s early contributions to the principles and methods of mechanics,” *Archive for History of Exact Sciences*, vol.28 (1983), pp.197–241.
- Dionigi Galletto, “Lagrange e le origini della *Mécanique Analytique*,” *Giornale di Fisica*, vol.32 (1991), pp.83–126.