『解析力学』の理論構成から見た
ラグランジュの初期の力学研究

有賀暢迪

電気通信大学 協力研究員

（元・日本学術振興会特別研究員）

日本科学史学会第58回年会

於 東京大学駒場Iキャンパス

2011/5/28

ラグランジュと『解析力学』(1)

ジョセフ・ルイ・ラグランジュ
Joseph Louis Lagrange

1736年1月25日生-1813年4月10日没

18世紀後半から19世紀初頭にかけて活躍した数学者.
解析学（微積分）の手法を駆使して力学の問題にアプローチする，今日「解析力学」と呼ばれるスタイルを強力に推進した.

ラグランジュと『解析力学』(2)

『解析力学』

ラグランジュ著

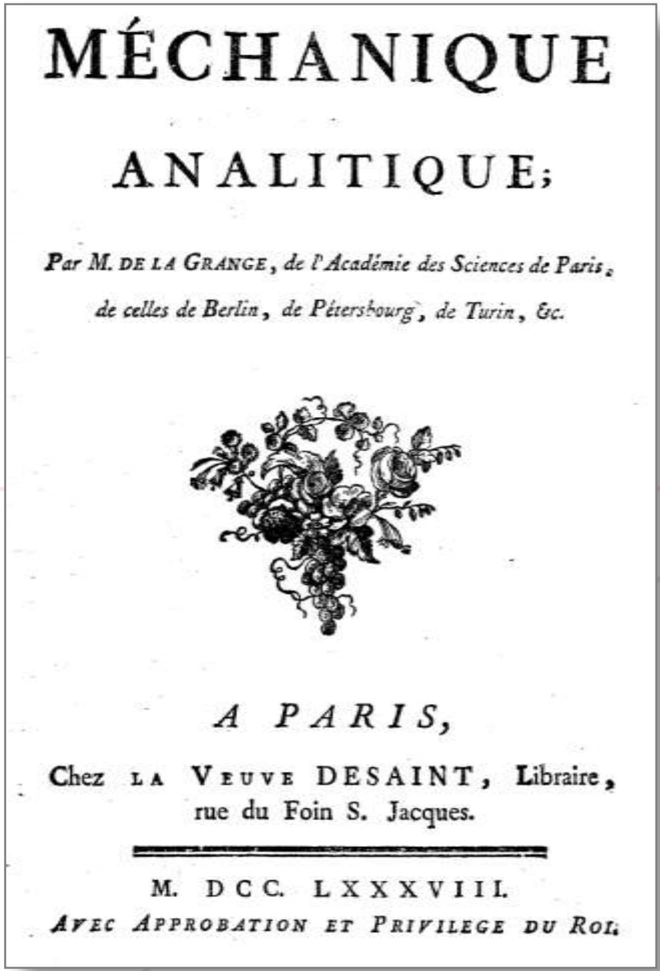
パリ，1788年［初版］

※増補改訂版（第二版）

1811-15年刊

Cf. 有賀による抄訳（2011）

『科学哲学科学史研究』誌


MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

【Fraser 1983】

- 動力学の基本原理に焦点
- 初期のラグランジュにおける「移行」shift
  - 最小作用の原理(1760/61)→仮想速度の原理(1764)
  - 適用可能な範囲の拡大
  - オイラーからダランベールへ

【Galletto 1991; Barroso Filho 1994; 山本 1997】

- Fraserの指摘した「移行」を踏襲

【報告者（有賀）】

- 「一般公式」への着目
  - 『解析力学』の重要性とラグランジュの意図が，この公式によって体現されている
- 音についての論文(1759)の位置づけ
  - ラグランジュの力学理論の形成，という文脈ではこれまで取り上げられず

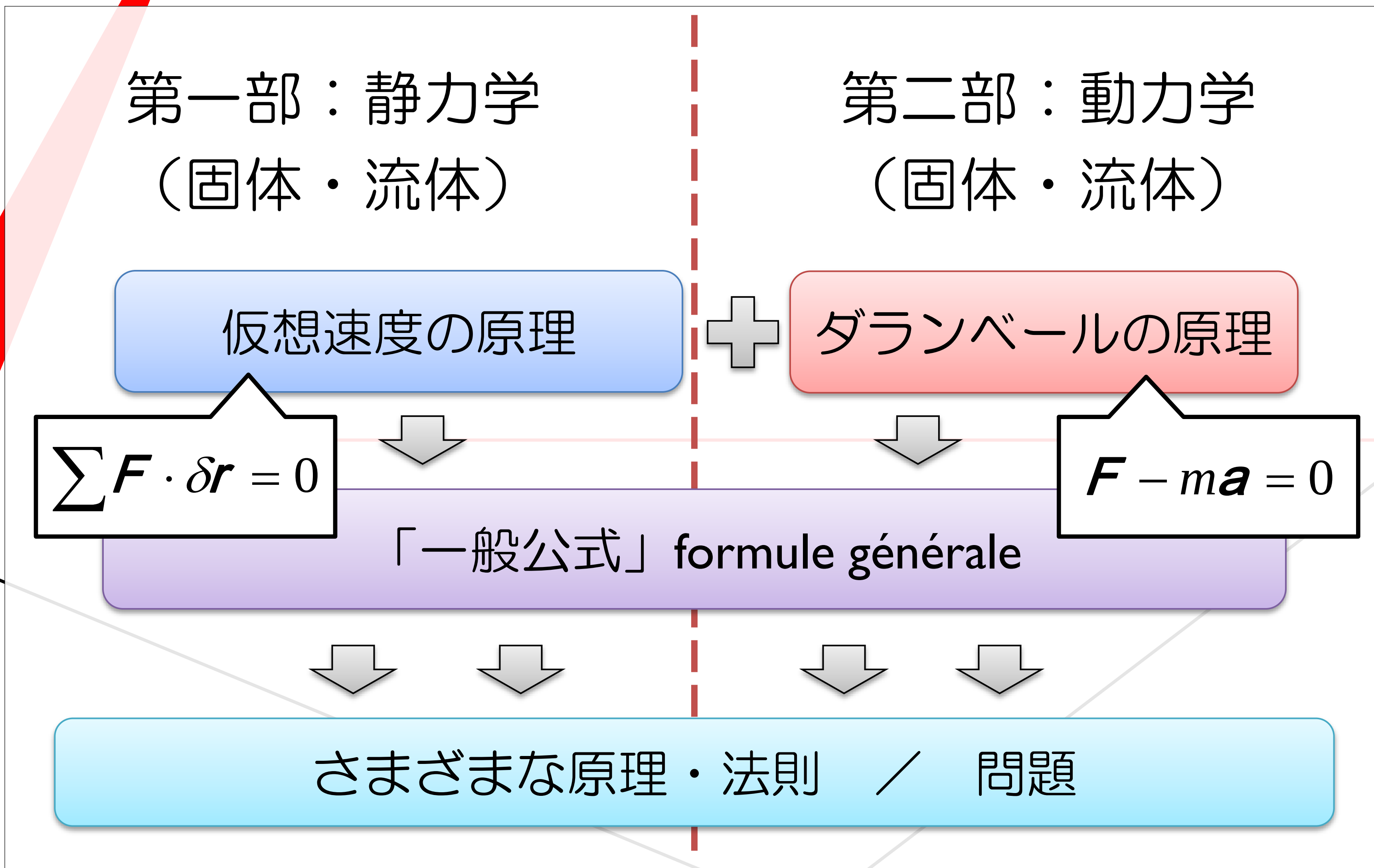
問題提起・発表構成

『解析力学』(1788)を参照系として用いた場合，ラグランジュの初期の力学研究はどのように叙述できるか？

- 『解析力学』の特質
  - 同書の理論構成；「一般公式」の重要性
- 「一般公式」への道
  - 先行者（オイラー，ダランベール）との関連

Q．ラグランジュ『解析力学』の
特質とは何か？

『解析力学』の理論構成


第一部：静力学
（固体・流体）
第二部：動力学
（固体・流体）
仮想速度の原理
ダランベールの原理
$\sum \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$
$\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0$
「一般公式」formule générale
さまざまな原理・法則　／　問題

１８世紀力学史における二つの論点

解析化	体系化
• 代数操作に基づいた微積分によって力学を研究 • 力学を通じて微積分自体も整備	• あらゆる問題や物体に適用できる普遍的原理の探求 • 一般原理から既知の法則を導く

Ex. 山本『古典力学の形成』(1997) 第一部・第二部

１８世紀力学史における『解析力学』の位置

解析化

- 代数操作のみ，図版なし

体系化

- 静力学と動力学，
  質点の力学と連続体の力学
  を統一的に議論

「一般公式」

tous les espaces parcourus par le corps m suivant les lignes p, q, r, &c. Donc $mP\times\delta p$, $mQ\times\delta q$, $mR\times\delta r$, &c, seront les *momens* des forces mP, mQ, mR, &c, agissantes suivant ces mêmes lignes, p, q, r, &c.

Or la formule générale de l'équilibre consiste en ce que la somme des *momens* de toutes les forces du système doit être nulle (Part. I, Sect. 2, art. 2); donc on aura la formule cherchée en égalant à zéro la somme de toutes les quantités

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$+\,m(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c),$$

relatives à chacun des corps du système proposé.

7. Donc si on dénote cette somme par le signe intégral S, qui doit embrasser tous les corps du système, on aura

$$\boxed{S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c.\right)m=0,}$$

pour la formule générale du mouvement d'un système quelconque de corps, regardés comme des points, & animés par des forces accélératrices quelconques P, Q, R, &c.

Pour faire usage de cette formule, on suivra les mêmes regles que pour la formule de l'équilibre; ainsi il faudra appliquer ici tout ce qui a été dit dans la seconde Section de la premiere Partie, depuis l'article 3 jusqu'à la fin, en observant que les différentielles marquées par la note ou caractéristique δ dans la formule précédente répondent aux différentielles marquées par la caractéristique ordinaire d dans la formule de l'équilibre, & se déterminent par les mêmes regles & les mêmes opérations.

釣りあいと運動の「一般公式」

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\dots\right)m=0$$

※S：考えている系の物体に関する和

※現代語訳　　質点系：$\sum\left(\left(\boldsymbol{F}-m_i\boldsymbol{a}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}\right)=0$

連続体：$\int\left(\left(\boldsymbol{F}-dm\boldsymbol{a}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}\right)=0$

『解析力学』の特質

単一の解析的表現に，
静力学と動力学，固体の力学と流体の力学を統合

Cf. ラグランジュの意図（『解析力学』「緒言」）

- 「この学問［力学］の理論と，これに関わる問題の解法とを，一般的な公式に帰着」
- 「同一の視点の下に［...］さまざまな原理を統一して提示」；静力学と動力学，固体と流体

Q．ラグランジュはどのようにして
「一般公式」へと辿りついたか？

ラグランジュの初期の経歴

1736　トリノに生まれる

1755　変分法のδ記号を発明
オイラーとの文通が始まる
王立砲兵学校で数学の教師となる

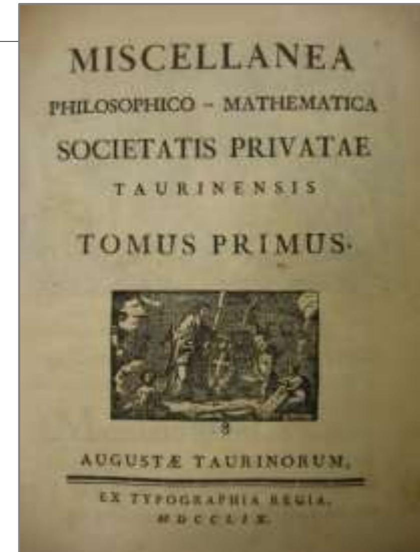
1757　友人たちと科学協会を設立

1759　音の性質と伝播についての論文刊行

1762　変分法と最小作用の原理についての論文刊行

1764　月の秤動に関する論文で賞を獲得

1766　オイラーの後任としてベルリンへ



ラグランジュの初期の経歴

1736　トリノに生まれる

1755　変分法のδ記号を発明
　　　オイラーとの文通が始まる
　　　王立砲兵学校で数学の教師となる

1757　友人たちと科学協会を設立

1759　音の性質と伝播についての論文

1762　変分法と最小作用の原理についての論文

1764　月の秤動に関する論文で賞を獲得

1766　オイラーの後任としてベルリ

『解析力学』につながる要素

『解析力学』と同じ理論的枠組

オイラーなどとの文通(1750s後半)

- 変分法のδ記号を導入
  - オイラーの得ていた公式を「いかなる作図もなしに証明」
- 最小作用の原理に適用する構想
  - この原理が動力学と静力学の「いわば普遍の鍵」
- 未刊の著書の計画
  - 「固体および流体の，つりあいにせよ運動にせよ極めて複雑な諸問題の解を，最小作用量のただ一つの式から，単純かつ一般的な仕方で導く」

⇒ 力学の解析化・体系化への志向

cf. オイラーと最小作用の原理

【Euler 1753】

- 「静止の法則」と最小作用の原理を同一視
- 「静止の法則」を静力学の具体的な問題に即して議論

⇒ 実質的に，仮想変位の原理の解析的な利用を行っている

– ex. $Adx + Bdy + Cdz = 0$

音の本性と伝播 (1759)

【Lagrange 1759】

- 一列に並んだ空気の粒子が弾性的に相互作用するモデル（F ∝ r）
- 各粒子について運動方程式を立て，連立させて解く
- 得られた結果を n→∞ に拡張
  - cf. ラグランジュの微積分理解（極限の概念）

⇒ 弦の振動と数学的に同じ問題

- 先行する論争（ダランベール，オイラー，D・ベルヌーイ）の解決を狙う

cf.オイラーと弦の振動

【Euler 1750】

- 弦の任意の一点について，その点を初期位置に引き戻す張力と，「加速力」（加速度）Pの関係を考察
  - 「P［加速力］と反対向きで等しい力を考えるならば，［…]そのときそれは弦を引っ張る力[...]と釣りあった状態になければならないであろう」

⇒「ダランベールの原理」

※ダランベールによる振動弦の議論には登場しない

最小作用の原理(1762)

【Lagrange 1762】

- 動力学の「一般原理」＝最小作用の原理

  $\Sigma\, m\, \delta \int u ds = 0$

- 式変形の途中で『解析力学』の「一般公式」に当たるものが出現
- 論文後半で，最小作用の原理を連続体に拡張

  $\delta \mathbf{S}\, dm \int u ds = 0$

⇒ 本質的な要素はこの時点で出揃っている

- 【Lagrange 1764】との連続性　cf.「移行」

1. 『解析力学』の特質
   - ラグランジュは，「一般公式」という単一の解析的表現によって，静力学と動力学，固体の力学と流体の力学を統合した
2. 「一般公式」への道
   - ラグランジュは，力学理論の解析化と体系化を志向し，先人たちの考えや手法を独自に組合せていった結果，「一般公式」へと導かれた

了

本発表は，（独）日本学術振興会科学研究費
補助金（特別研究員奨励費，平成21-22年度）
による研究成果の一部である