

オイラーの変分力学*

有賀暢迪**

変分力学とは

変分力学：ニュートン力学とは異なる定式化

- ⇒ 現象を，ある量が極値を取る，という仕方で記述
- ⇒ 数学的には，変分法を用いて問題を解く

例：ハミルトンの原理

系の実際の運動は，考えられるすべての運動のうちで， $\int L dt$ が極値を取るようなものである

$\delta \int L dt = 0$ を，変分法を用いて解くことで運動を求める（ L は系のラグランジアン）

「オイラーの変分力学」

オイラーによる変分力学の試み

静力学 — 「静止の法則」

『モーペルテュイ氏の静止と運動の一般原理のあいだの調和』(1751)

動力学 — 「運動の法則」

『最大および最小の方法によって決定される，抵抗のない媒質における投射体の運動について』(1744)

統一的な扱い — 2つの法則の「調和」

『調和』(1751)

「オイラーの変分力学」の基礎

「最小作用の原理」

自然現象においては，何らかの量が最小になっている

- ⇒ 現代の変分力学 — 「極値」であればよい
- ⇒ オイラーの場合 — 「最小」であることを要請

* 2006年5月27日

** 京都大学文学研究科（科学哲学科学史専修・修士課程） ariga_phs@yahoo.co.jp

静力学 — 「静止の法則」

「静止の法則」

系がつりあっている時には、「労力」(effort) Φ が基本的に最小になっている

$$(\Phi = - \int F ds - \int F' ds' - \dots)$$

- ⇒ 「労力」が最大のつりあいは例外 (不安定)
- ⇒ 自然は「労力の和をできる限り節約する」

動力学 — 「運動の法則」

「運動の法則」

質点の描く軌道においては、「作用」(action) $\int mv ds$ が最小になっている

- ⇒ 「最小」である理由 — 慣性に基づく説明
慣性のため、なるべく外力には従わない
外力の効果 (= 「作用」) は最小のはず

ここまでのまとめ

「静止の法則」 — 「労力」 Φ が最小
「運動の法則」 — 「作用」 $\int mv ds$ が最小
どちらの法則も「最小作用の原理」に基づく

- ⇒ これらの法則自体は、特定の問題に限れば正しい
- ⇒ ただし、「最小」という条件は 数学的には不要

「調和」の証明

「調和」の証明：「静止の法則」から「運動の法則」を導く

⇒ 現代の観点からは、この証明は不可能

静止において Φ が最小

↓ ————— ステップ 1：運動の各瞬間に Φ を考える

運動において $\int \Phi dt$ が最小

↓ ————— ステップ 2： Φ と $\frac{1}{2}mv^2$ が「実質的に同じ」

運動において $\int \frac{1}{2}mv^2 dt$ が最小

↓ ————— ステップ 3： $vdt = ds$ と書き換える

運動において $\int mv ds$ が最小

ステップ 1

⇒ オイラーの主張

「もし自然の意図が労力の和に関して可能な限り節約することであるのなら、[...] その意図は運動にまで及ぶ必要がある」

推論の根拠は「最小作用の原理」

ステップ 2

⇒ この推論の根拠： $\frac{1}{2}mv^2 = \text{Const.} - \Phi$ (エネルギー保存)

「労力」と「作用」とは最大・最小が逆

「調和」は成り立っていない

結論

「オイラーの変分力学」の性格と限界

⇒ 「最小作用の原理」に基づく静力学・動力学

⇒ 「調和」の証明も同じ考えに基づくが、失敗

「オイラーの変分力学」は、
「最小作用の原理」に基づいているために、
静力学と動力学の統一的な扱いに失敗している

推察

ラグランジュ『解析力学』（1788）

- ✓ 「仮想速度の原理」に基づく静力学・動力学
... 統一的に扱うことに成功
- ✓ 「最小」ではなく、「変分がゼロ」を基本に考える
... オイラーはラグランジュの「反面教師」か？

文献

Leonhard Euler, “Additamentum II: De Motu Projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando,” appendix of Idem, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti* (Lausanna & Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & socios, 1744), in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, ser.I, vol.XXIV (Bern, 1952), 298-308.

———, “Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis,” *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 1751* (pub.1753), 169-198, in *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, ser.II, vol.V, 152-176.